Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada de Matematică
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
11 Martie 2006

CLASA A IX-A

Problema 1. Fie x, y, z numere reale strict pozitive. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right).$$

Problema 2. Căsuţele unei table 9×9 se completează cu numere distincte de la 1 la 81. Să se arate că există $k\in\{1,2,3,...,9\}$ astfel încât produsul elementelor de pe linia k este diferit de produsul elementelor de pe coloana k.

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex, M mijlocul lui AB, N mijlocul lui BC, E intersecţia segmentelor AN şi BD şi F intersecţia segmentelor DM şi AC. Arătaţi că dacă $BE=\frac{1}{3}BD$ şi $AF=\frac{1}{3}AC$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Problema 4. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, notăm cu $p(n)$ cel mai mare număr prim mai mic sau egal cu n şi cu $q(n)$ cel mai mic număr prim mai mare strict ca n. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p(k)q(k)}<\frac{1}{2}.$$

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte.